НУЛЬВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

С.Я. Котковский

s_kotkovsky@mail.ru

В статье рассматриваются свойства бикватернионных делителей нуля («нулькватернионов»). С подалгеброй нулькватернионов тесно связано их сужение – «нульвекторы» (также называемые изотропными векторами), которые представляют собой комплекснозначные трёхмерные векторы, имеющие нулевой квадрат. Теорема о нульвекторной факторизации показывает, что обыкновенный нулькватернион представляется в виде произведения двух нульвекторов, классы которых определены однозначно, т.е. задают структуру нулькватерниона. Теорема о нульвекторной аллельности гласит, что в произведении двух нулькватернионов сохраняется одна из двух структурных половин каждого из сомножителей. Последнее обстоятельство указывает на замечательное сходство нульвекторной алгебры с генетикой: произведение нульвекторов подобно соединению аллельных генов в хромосоме. Показывается, что наряду с нульвекторами существуют «однородные» классы нулькватернионов, изоморфных нульвекоторным классам. Обыкновенные, однородные нулькватернионы и нульвекторы составляют общую классификацию нулькватернионов относительно операции умножения.

Ключевые слова: бикватернионы, делители нуля, нульвекторы, изотропные векторы, генетическая алгебра, гиперкомплексные числа.

1 Введение

Бикватернионы были открыты Гамильтоном вслед за открытием им кватернионов, как комплекснозначное расширение последних [1]. Гамильтон также обнаружил существование делителей нуля среди бикватернионов (см. [2]) (которые мы называем в нашей статье «нулькватернионами»), которые до сих пор оставались малоизучены. Некоторые их аспекты, в частности наличие и критерии идемпотент и нильпотент, были рассмотрены в работе [2]

Настоящая работа изучает связи между различными видами нулькватернионов, в частности, между т.н. «обыкновенными» нулькватернионами и нульвекторами, т.е. трёхмерными комплекснозначными векторами, имеющими нулевой квадрат. Обнаружен ряд свойств, главные из которых выражены теоремами о нульвекторной факторизации и аллельности. Теорема о нульвекторной факторизации утверждает, что любой обыкновенный нулькватернион Q представим в виде произведения двух нульвекторов $\tilde{\mathbf{q}}_L$ и $\tilde{\mathbf{q}}_R$:

$$Q \;=\; \tilde{\mathbf{q}}_L * \tilde{\mathbf{q}}_R \tag{1.1}$$

классы которых определены однозначно.

Интереснейшим следствием нульвекторной факторизации, является нульвекторная аллельность: при умножении друг на друга нулькватернионы дают произведению каждый по своей структурной половине:

$$Q \;=\; Q_1 * Q_2 \;=\; \{\mathbf{q}_{L1}\} * \{\mathbf{q}_{R2}\} \tag{1.2}$$

Последнее свойство указывает на подобие нульвекторов и биологических генов. В генетике при скрещивании половина генетической информации родителя передаётся потомку. В случае нулькватернионов в качестве такой половины выступает либо левая, либо правая структурная половина, в зависимости от порядка произведения двух нулькватернионов.

Таким образом, произведение нулькватернионов является математическим аналогом диплоидного генетического скрещивания.

Так, на наш взгляд, получает свое продолжение идея алгебраического основания процессов живой природы, заявленная в работе [3], в которой была показана связь между молекулярно-генетическими алфавитами и гиперкомплексными числами.

Проведенное нами изучение алгебраических свойств нулькватернионов, также называемых изотропными векторами, представляет интерес и для физики. В частности, суперпозиция изотропных векторов, связанных с безмассовыми полями, служит базисом теретического построения т.н. идущей волны [4], моделирующей массивные частицы.

2 Бикватернионы

Мы используем скалярно-векторное представление бикватернионов (см. [5], [6]), в котором бикватернион A есть связка комплекснозначных числа («скаляра») $\alpha = Sc(A)$ и трёхмерного вектора $\mathbf{a} = Vc(A)$:

$$A = \ (\alpha, \mathbf{a}) \equiv \alpha + \mathbf{a},\ \alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{a} \in \mathbb{C}^{\mathbf{3}} \tag{2.1}$$

с определёнными операциями сложения и умножения. (Оба обозначения в (2.1), скобочное и в виде суммы числа и вектора эквивалентны.) Операция сложения бикватернионов вводится тривиальным образом - как почленное сложение числовой и векторной составляющих.

Введём такое представление (назовем его *комплексным*), в котором произведение двух бикватернионов $A = (\alpha, \mathbf{a})$ и $B = (\beta, \mathbf{b})$ имеет вид:

$$A * B \equiv (\alpha, \mathbf{a}) * (\beta, \mathbf{b}) \ = \ (\alpha\beta + (\mathbf{ab}), \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a} + i[\mathbf{ab}]) \tag{2.2}$$

где $(\mathbf{ab})$ и $[\mathbf{ab}]$ — скалярное и векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно. Несложно показать, что представление (2.2) изоморфно стандартному представлению бикватернионов (см.напр. [6](1)), рассматриваемым, как комплекснозначные кватернионы. Операция бикватернионного умножения обладает свойством ассоциативности:

$$A * B * C \ \equiv \ (A * B) * C \ = \ A * (B * C) \tag{2.3}$$

где A, B, C — три произвольных бикватерниона. Комплексное представление (2.2) позволяет выразить правило коммутации в случае, когда оба бикватерниона A и B – вещественны, как:

$$A * B \ = \ (B * A)^*, \quad A, B - real \tag{2.4}$$

где верхний индекс * обозначает комплексное сопряжение.

Определение 1. *Бикватернион, сопряжённый данному бикватерниону* $A = (\alpha, \mathbf{a})$*, есть:*

$$\overline{A} \equiv (\alpha, -\mathbf{a}) \tag{2.5}$$

Сопряжение произведения бикватернионов обращает порядок сомножителей:

$$\overline{A * B} \ = \ \overline{B} * \overline{A} \tag{2.6}$$

Определение 2. *Квадрат модуля бикватерниона* A *есть:*

$$|A|^2 \ = \ |\alpha + \mathbf{a}|^2 \equiv A * \overline{A} \ = \ \alpha^2 - \mathbf{a}^2 \tag{2.7}$$

Величина (2.7) в общем случае является комплексным числом. Поэтому, в отличие от случая кватернионов, она не может служить в качестве квадрата нормы (полунормы), хотя и обладает некоторыми свойствами последней. Квадрат модуля произведения обладает свойством мультипликативности:

$$|A * B|^2 \;=\; |A|^2 * |B|^2 \tag{2.8}$$

Определение 3. *Если бикватернион A имеет ненулевой квадрат модуля, то бикватернион обратный A, есть:*

$$\frac{1}{A} \;\equiv \frac{\overline{A}}{|A|^2} \tag{2.9}$$

Определение 4. *Два бикватерниона A_1 и A_2 принадлежат одному классу, если существует такое комплескное число c: $A_2 = cA_1$.*

Класс, которому принадлежит некоторый бикватернион A, мы будем в дальнейшем обозначать, как $\{A\}$:

$$A \in \{A\} \tag{2.10}$$

Как упоминалось выше, корень из квадрата модуля бикватерниона не может служить ни нормой, ни даже полунормой. Однако, норму бикватерниона возможно ввести другим образом:

Определение 5. *Норма бикватерниона $U = (s, \mathbf{u})$ есть:*

$$\|U\| = \sqrt{\frac{1}{2} Sc(U * U^*)}, \tag{2.11}$$

где, напомним, $Sc(A)$ - скалярная часть бикватерниона А. Не представляет труда непосредственная проверка того, что определенная согласно (2.11) величина действительно вправе быть нормой, т.е. для нее выполняются следуюшие требования:

$$\begin{cases} \|U\| \geq 0 \\ \|U\| = 0 \;\leftrightarrow\; U = 0 \\ \|cU\| = |c|\|U\|, \;\; c \in C \\ \|U_1 + U_2\| \leq \|U_1\| + \|U_2\| \end{cases} \tag{2.12}$$

Хорошо известно, что кольцо бикватернионов (в рассматриваемом в данной статье классическом смысле) изоморфно кольцу комплексных матриц второго ранга (матриц Паули) [7]. Поэтому приводимые здесь результаты можно получить и прибегая к языку матриц. Однако используемое нами представление «число-вектор» более наглядно и полезно с методологической точки зрения. Обратим здесь внимание на то, как соответствует наша векторная терминология матричной. Квадрат модуля бикватерниона, определенный согласно (2.7), в матричном представлении есть определитель матрицы. Нулькватернионам соответствуют вырожденные матрицы (определитель которых равен нулю), векторам - матрицы с нулевым следом, нульвекторам - вырожденные матрицы с нулевым следом (нильпотентные матрицы).

3 Нулькватернионы

Определение 6. *Нулькватернион Q есть бикватернион с нулевым квадратом модуля:*

$$|Q|^2 \;=\; 0 \tag{3.1}$$

Покажем тождественность понятий нулькватернионов и бикватернионных делителей нуля.

Лемма 1. *Нулькватернионы есть единственно возможные делители нуля в пространстве бикватернионов.*

Доказательство. Тот факт, что любой нулькватернион есть делитель нуля вполне очевиден и следует непосредственно из определения квадрата модуля бикватерниона:

$$|Q|^2 \; = \; Q * \overline{Q} \; = \; 0 \tag{3.2}$$

Покажем теперь, что любой бикватернионный делитель нуля есть нулькватернион. Пусть:

$$A * B \; = \; 0, \;\; A = (\alpha, \mathbf{a}), \;\; B = (\beta, \mathbf{b}) \tag{3.3}$$

Возьмём квадрат модуля от обеих сторон (3.3) и воспользуемся свойством (2.8):

$$|A * B|^2 \; = \; |A|^2 * |B|^2 \; = \; 0 \tag{3.4}$$

Поскольку $|A|^2$ и $|B|^2$ есть комплексные числа, то либо $|A|^2$, либо $|B|^2$ равно 0. Примем для определённости, что[1]:

$$|A|^2 \; = \; 0 \; \Rightarrow \; \alpha^2 = a^2 \tag{3.5}$$

Разложим (3.3) покомпонентно:

$$\alpha\beta + (\mathbf{ab}) \; = \; 0 \tag{3.6}$$

$$\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a} + i[\mathbf{ab}] \; = \; 0 \tag{3.7}$$

Из (3.7) следует:

$$\mathbf{b} \; = \; -\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{a} \tag{3.8}$$

и, значит, квадрат модуля B также равен 0:

$$|B|^2 \; = \; \beta^2 - b^2 \; = \; \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - a^2) \; = \; 0 \tag{3.9}$$

Таким образом, как A, так и B в (3.3) обязаны быть нулькватернионами, ч.т.д. □

Лемма 2. *Для произвольного нулькватерниона*

$$Q \equiv (\alpha + i\beta, \mathbf{a} + i\mathbf{b}), \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \;\; \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \tag{3.10}$$

верны неравенства:

$$\begin{cases} |\alpha| \le a \\ |\beta| \le b \end{cases} \tag{3.11}$$

Доказательство. Из условия нулевого квадрата модуля (3.1) и определения (2.7) следует связь между компонентами Q:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 & = a^2 - b^2 \\ \quad \alpha\beta & = (\mathbf{ab}) \end{cases} \tag{3.12}$$

Будем доказывать (3.11) от противного: пусть $|\alpha| > a \Rightarrow \alpha^2 > a^2$, следовательно, согласно первому из уравнений (3.12), $\beta^2 > b^2 \Rightarrow |\beta| > b$. Значит, $\alpha^2\beta^2 > a^2b^2$. Но это противоречит второму из уравнений (3.12): $\alpha^2\beta^2 = (\mathbf{ab})^2 \;\Rightarrow\; \alpha^2\beta^2 \le a^2b^2$, что и доказывает лемму. □

[1]Здесь и далее v обозначает величину вещественнозначного вектора $\mathbf{v}$: $v^2 = \mathbf{v}^2, v \ge 0$.

4 Нульвекторы и однородные нулькватернионы

Чисто векторные нулькватернионы мы назовём нульвекторами.

Определение 7. *Нульвектором* $\mathbf{q}$ *называется комплекснозначный вектор, у которого квадрат равен 0:*

$$\mathbf{q} \;=\; \mathbf{A} + i\mathbf{B}, \quad \mathbf{q}^2 = 0, \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \tag{4.1}$$

Легко проверить, что комплекснозначный вектор является нульвектором в том и только том случае, когда он крестовидный, т.е. его вещественная и мнимая составляющие взаимно перпендикулярны и равны по величине (рис.1):

$$A = B, \;\; \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \tag{4.2}$$

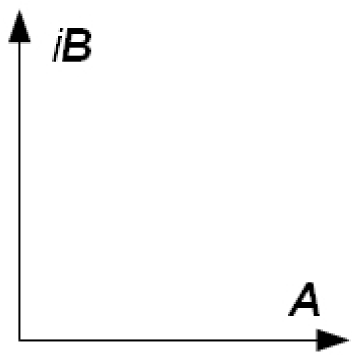

Рис. 1: Нульвектор

В общем случае произведение (в бикватернионном смысле (2.2)) двух нульвекторов не есть нульвектор, хотя и есть нулькватернион.

Определение 8. *Нульвекторным классом (далее «н.в. класс») мы назовём совокупность всех нульвекторов параллельных некоторой плоскости Π (включая 0), и обладающих одной и той же ориентацией (рис.2):*

$$\mathbf{q} = \mathbf{A} + i\mathbf{B}, \;\; \frac{[\mathbf{AB}]}{AB} \;=\; \mathbf{n} \tag{4.3}$$

Несложно убедитья в том, что н.в. класс, которому принадлежит некоторый нульвектор $\mathbf{q}$, есть класс этого бикватерниона $\{\mathbf{q}\}$ согласно определению 4.

Для каждой плоскости Π существуют два класса нульвекторов, соответственно двум ориентациям. Единичный вещественный вектор, задающий класс, мы назовём *определяющим вектором* этого класса:

$$\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}, \;\; \mathbf{n}^2 = 1, \;\; \mathbf{n} \perp \Pi \tag{4.4}$$

Определение 9. *Определитель н.в. класса, задаваемого определяющим вектором* $\mathbf{n}$ *есть нулькватернион:*

$$N = (1, \mathbf{n}) \tag{4.5}$$

Для дальнейших целей будет полезно следующее тождество, получаемое прямой подстановкой N:

$$N * \mathbf{q} \;=\; 2\mathbf{q} \tag{4.6}$$

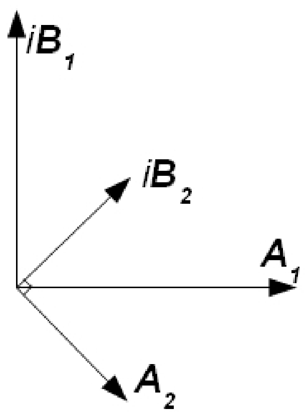

Рис. 2: Нульвекторный класс

Легко убедиться в том, что произведение любых двух нульвекторов одного класса есть 0:

$$\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 \ = \ 0, \ \{\mathbf{q}_1\} = \{\mathbf{q}_2\} \tag{4.7}$$

т.е. также принадлежит этому классу. Очевидно, что сумма и разность двух нульвекторов остаются в том же н.в. классе. Это означает, что н.в. класс есть алгебраическое кольцо. Более того, н.в. класс образует алгебру над полем комплексных чисел. Действительно, произведение нульвектора некоторого класса на комплексное число есть опять нульвектор этого же класса:

$$\lambda \mathbf{q} \in \{\mathbf{q}\}, \ \lambda \in \mathbb{C} \tag{4.8}$$

Любой нульвектор $\mathbf{q}_0$ из н.в. класса кроме 0 может быть выбран в качестве *базисного*. Тогда произвольный нульвектор этого класса может быть представлен в виде:

$$\mathbf{q} \ = \ c\mathbf{q}_{0,} \ c \in \mathbb{C} \tag{4.9}$$

Два нульвектора принадлежащих одному и тому же классу, т.е. связанных соотношением (4.9), назовем *эквивалентными*.

Произведение нульвекторов разных классов уже не есть нульвектор, хотя и остаётся быть нульватернионом. Два н.в. класса, задаваемые противоположными определяющими векторами, назовём *сопряжёнными*. Легко увидеть, что комплексно сопряжённые нульвекторы принадлежат сопряжённым классам.

Степени нульвектора выше первой вырождены:

$$\mathbf{q}^k \ = \ \begin{cases} \mathbf{q} & , k = 1 \\ 0 & , k > 1, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{4.10}$$

Определение 10. *Однородным нульватернионом P называется нульватернион вида:*

$$P \ = \ c\ (\epsilon, \mathbf{p}), \quad c \in \mathbb{C}, \ \epsilon \in \mathbb{R}, \ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \ \ \epsilon^2 = \mathbf{p}^2 \tag{4.11}$$

Класс, которому принадлежит тот или иной однородный нульватернион, мы будем называть *однородным классом*. Таким образом, каждый определитель н.в. класса (4.5) является однородным нульватернионом. Далее, мы убедимся, что, с точностью до класса, однородные нульватернионы изоморфны нульвекторам.

Согласно определению (2.11) нормой нульвектора $\mathbf{q} = \mathbf{A}+i\mathbf{B}$ является величина $A = B$, а нормой однородного нульватерниона (4.11) - величина $|c|\epsilon$.

5 Представление обыкновенных нулькватернионов через нульвекторы

Определение 11. *Обыкновенным называется нулькватернион, не являющийся ни нульвектором, ни однородным нулькватернином.*

Лемма 3. *Произвольный обыкновенный нулькватернион $Q = (s, \mathbf{Q})$ представим каждым из двух способов:*

$$Q = \mathbf{q}_L + sN_{\mathbf{q}_L} \tag{5.1}$$

$$Q = \mathbf{q}_R + s\overline{N}_{\mathbf{q}_R} \tag{5.2}$$

где $\mathbf{q}_L$ и $\mathbf{q}_R$ – однозначно связанные с Q нульвекторы; $N_{\mathbf{q}_L}$ и $N_{\mathbf{q}_R}$ – определители н.в. классов, которым принадлежат $\mathbf{q}_L$ и $\mathbf{q}_R$ соответственно.

Доказательство. Построим сначала нульвектор $\mathbf{q}_L$:

$$\mathbf{q}_L = \mathbf{A} + i\mathbf{B}, \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}, \; A = B, \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \tag{5.3}$$

$$N_{\mathbf{q}_L} = (1, \mathbf{n}_L) \tag{5.4}$$

Обозначим:

$$Q = (s, \mathbf{Q}) \equiv (\alpha + i\beta, \mathbf{a} + i\mathbf{b}) \tag{5.5}$$

Расписывая (5.1) покомпонентно, получаем векторное уравнение:

$$\mathbf{a} + i\mathbf{b} = \mathbf{A} + i\mathbf{B} + (\alpha + i\beta)\mathbf{n}_L \tag{5.6}$$

в то время, как скалярное уравнение выполняется автоматически в силу выбора множителя s в правой части (5.1). Далее, рассматривая в отдельности вещественную и мнимую части (5.6), приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{A} &= \mathbf{a} - \alpha\mathbf{n}_L \\ \mathbf{B} &= \mathbf{b} - \beta\mathbf{n}_L \end{cases} \tag{5.7}$$

Поскольку $\mathbf{q}$ есть нульвектор, то должны выполняться условия:

$$\begin{gathered} A = B \\ (\mathbf{AB}) = 0 \end{gathered} \tag{5.8}$$

Из (5.7),(5.8), с учётом (3.12), вытекает:

$$\begin{cases} (\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}) \cdot \mathbf{n}_L &= \alpha^2 - \beta^2 \\ (\beta\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}) \cdot \mathbf{n}_L &= 2\alpha\beta \end{cases} \tag{5.9}$$

Вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны и оба ненулевые, т.к. нулькватернион Q обыкновенный, а коллинеарность этих векторов или равенство нулю хотя бы одного из них означало бы его однородность. Аналогично, α и β не равны нулю одновременно, поскольку Q не нульвектор. Следовательно, можно ввести тройку независимых векторов, образующих трёхмерный базис:

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b} \\ \mathbf{f} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a} \\ \mathbf{g} = [\mathbf{ab}] \end{cases} \tag{5.10}$$

Разложим искомый вектор $\mathbf{n}_L$ по этому базису:

$$\mathbf{n}_L = x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g}, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \tag{5.11}$$

Подстановка (5.11) в (5.9) даёт систему уравнений относительно x и y:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 & = xe^2 + y(\mathbf{ef}) \\ 2\alpha\beta & = x(\mathbf{ef}) + yf^2 \end{cases} \tag{5.12}$$

решение которой есть:

$$\begin{cases} x & = \dfrac{(\alpha^2 - \beta^2)f^2 - 2\alpha\beta(\mathbf{ef})}{e^2 f^2 - (\mathbf{ef})^2} \\ y & = \dfrac{2\alpha\beta e^2 - (\alpha^2 - \beta^2)(\mathbf{ef})^2}{e^2 f^2 - (\mathbf{ef})^2} \end{cases} \tag{5.13}$$

Знаменатель в последних выражениях выражается, как:

$$e^2 f^2 - (\mathbf{ef})^2 \; = \; (\alpha^2 + \beta^2)^2 g^2 \tag{5.14}$$

в то время, как g^2:

$$g^2 = [\mathbf{ab}]^2 = (a^2 - \alpha^2)(a^2 + \beta^2) \tag{5.15}$$

Как было сказано выше, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны и оба ненулевые, и ,значит, g^2, а вместе с ним знаменатель в (5.13) не равны нулю. Далее, условие того, что вектор $\boldsymbol{n}$ единичный, превращается в уравнение относительно *x,y,z:*

$$\mathbf{n}_L^2 \; = \; 1 \; = \; x^2 e^2 + 2xy(\mathbf{ef}) + y^2 f^2 + z^2 g^2 \tag{5.16}$$

Решая последнее относительно z, получаем:

$$z \; = \; \pm\sqrt{\frac{1 - x^2 e^2 - y^2 f^2 - 2xy(\mathbf{ef})}{g^2}} \; = \; \pm\frac{1}{g}\sqrt{\frac{a^2 - \alpha^2}{a^2 + \beta^2}} \tag{5.17}$$

Таким образом, условие существования искомого представления (5.1) сводится к условию знакоположительности подкоренного выражения в (5.17):

$$a^2 \geq \alpha^2 \tag{5.18}$$

которое заведомо выполняется для любого нулькватерниона согласно Лемме 2. Искомые значения *x,y,z:*

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)(a^2 + \beta^2)} \\ y = \dfrac{2\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)(a^2 + \beta^2)} \\ \quad z = \pm\dfrac{1}{a^2 + \beta^2} \end{cases} \tag{5.19}$$

Согласно формулам (5.10),(5.11) по значениям x, y, z из (5.19) получаем два значения вектора $\mathbf{n}_L$ соответственно знакам «$+$» и «$-$» для z:

$$\mathbf{n}_\pm = \mathbf{a}(x\alpha + y\beta) + \mathbf{b}(y\alpha - x\beta) + \mathbf{g}z_\pm \tag{5.20}$$

Покажем, что вектор $\mathbf{n}_+$ направлен по вектору $[\mathbf{AB}]$, а вектор $\mathbf{n}_-$ против $[\mathbf{AB}]$, т.е. $\mathbf{n}_+$ определяет н.в. класс $\{\mathbf{q}_L\}$ в согласии с определением (4.3), а вектор $\mathbf{n}_-$ не является определяющим для этого класса. Действительно:

$$[\mathbf{AB}]\cdot\mathbf{n}_L = ([\mathbf{ab}]-\alpha[\mathbf{n}_L\mathbf{b}]-\beta[\mathbf{an}_L])\cdot\mathbf{n}_L = [\mathbf{ab}]\cdot\mathbf{n} = \mathbf{g}\cdot\mathbf{n}_L = \mathbf{g}\cdot z\mathbf{g} = zg^2 = \pm\frac{g}{a^2+\beta^2} \quad (5.21)$$

т.е. $[\mathbf{AB}]\cdot\mathbf{n}_+ > 0$ и $[\mathbf{AB}]\cdot\mathbf{n}_- < 0$.

Таким образом, однозначным способом построено представление (5.1) :

$$\mathbf{n}_L \ = \ \mathbf{n}_+ \ = \ \frac{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+[\mathbf{ab}]}{a^2+\beta^2} \quad (5.22)$$

$$\mathbf{q}_L \ \equiv \ \mathbf{A}+i\mathbf{B} \ = \ \frac{\mathbf{a}(b^2-i\alpha\beta)+i\mathbf{b}(a^2+i\alpha\beta)-(\alpha+i\beta)[\mathbf{ab}]}{a^2+\beta^2} \quad (5.23)$$

Несложно увидеть, что вектору $\mathbf{n}_-$ соответствует «правое» представление (5.2):

$$\mathbf{n}_R \ = \ \mathbf{n}_- \ = \ \frac{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}-[\mathbf{ab}]}{a^2+\beta^2} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{q}_R \ = \ \frac{\mathbf{a}(b^2-i\alpha\beta)+i\mathbf{b}(a^2+i\alpha\beta)+(\alpha+i\beta)[\mathbf{ab}]}{a^2+\beta^2} \quad (5.25)$$

□

Согласно определению (2.11), норма обыкн. нульkватерниона Q, представляемого согласно (5.2,5.5):

$$\|Q\| = \sqrt{\|\mathbf{q}_L\|^2+\|sN_{\mathbf{q}_L}\|^2} \quad (5.26)$$

Таким образом, составляющие $\mathbf{q}_L$ и $sN_{\mathbf{q}_L}$ в (5.2) можно назвать *поперечником* и *продольником* соответственно, а тождество 5.26 аналогом теоремы Пифагора для нульkватернионов. Те же соображения применимы и к (5.5), указывая на существование двух пар поперечник-продольник для любого обыкн. нульkватерниона.

6 Нульвекторная факторизация

Теорема 1. Нульвекторная факторизация. *Произвольный обыкновенный нульkватернион Q можно представить в виде произведения двух нульвекторов $\tilde{\mathbf{q}}_L$ и $\tilde{\mathbf{q}}_R$:*

$$Q \ = \ \tilde{\mathbf{q}}_L * \tilde{\mathbf{q}}_R \quad (6.1)$$

причём н.в. классы $\{\tilde{\mathbf{q}}_L\}$ и $\{\tilde{\mathbf{q}}_R\}$ определены однозначно для данного Q и являются классами $\{\mathbf{q}_L\}$ и $\{\mathbf{q}_R\}$ Леммы 3

Доказательство. Перемножая найденные выше в (5.23), (5.25) значения $\{\mathbf{q}_L\}$ и $\{\mathbf{q}_R\}$, получаем:

$$\mathbf{q}_L * \mathbf{q}_R \ = \ c(\alpha+i\beta,\mathbf{a}+i\mathbf{b}) \ = \ cQ, \quad c\in\mathbb{C} \quad (6.2)$$

$$c \ = \ -2\frac{(\alpha+i\beta)(a^2-\alpha^2)}{a^2+\beta^2} \quad (6.3)$$

$$Q \ = \ \frac{1}{c}\mathbf{q}_L * \mathbf{q}_R \quad (6.4)$$

Но тогда можно для произвольного комплексного числа c_L получить нульвектор класса $\{\mathbf{q}_L\}$: $\tilde{\mathbf{q}}_L = c_L\mathbf{q}_L$ и соответствующий ему нульвектор из класса $\{\mathbf{q}_R\}$: $\tilde{\mathbf{q}}_R = c_R\mathbf{q}_R$, такие, что

$$\tilde{\mathbf{q}}_L * \tilde{\mathbf{q}}_R \;=\; c_L c_R \mathbf{q}_L * \mathbf{q}_R \;=\; Q \tag{6.5}$$

Исходя из (6.4), коэффициентами c_L и c_R должны соотноситься, как:

$$c_L c_R = \frac{1}{c} \tag{6.6}$$

Покажем теперь, что представление (6.1) единственно с точностью до н.в. классов $\{\tilde{\mathbf{q}}_L\}$ и $\{\tilde{\mathbf{q}}_R\}$. Пусть существует отличная от этих классов пара н.в. классов $\{\tilde{\mathbf{q}}'_L\}$ и $\{\tilde{\mathbf{q}}'_R\}$:

$$Q \;=\; \tilde{\mathbf{q}}'_L * \tilde{\mathbf{q}}'_R \tag{6.7}$$

Умножим обе части (6.7) слева на $\tilde{\mathbf{q}}'_L$. В силу ассоциативности бикватернионного умножения (2.3)) и свойства (4.10) зануления степеней нульвектора выше первой, получим:

$$\tilde{\mathbf{q}}'_L * Q \;=\; (\tilde{\mathbf{q}}'_L * \tilde{\mathbf{q}}'_L) * \tilde{\mathbf{q}}'_R \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad ((\tilde{\mathbf{q}}'_L \mathbf{Q}), s\tilde{\mathbf{q}}'_L + i[\tilde{\mathbf{q}}'_L \mathbf{Q}]) = 0 \tag{6.8}$$

откуда следует система уравнений:

$$(\tilde{\mathbf{q}}'_L \mathbf{Q}) = 0 \tag{6.9}$$

$$s\tilde{\mathbf{q}}'_L + i[\tilde{\mathbf{q}}'_L \mathbf{Q}] = 0 \tag{6.10}$$

Обозначим:

$$\tilde{\mathbf{q}}'_L \;=\; \mathbf{A} + i\mathbf{B}, \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}, A = B, \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \tag{6.11}$$

$$\mathbf{C} \equiv \frac{[\mathbf{AB}]}{A} \;=\; A\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3, n = 1 \tag{6.12}$$

Разложим комплекснозначный вектор $\mathbf{Q}$ по трёхмерному базису $\boldsymbol{A,B,C}$:

$$\mathbf{Q} \;=\; a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}, \;\; a, b, c \in \mathbb{C} \tag{6.13}$$

Подставляя (6.13) в (6.9), получаем условие:

$$b = ia \tag{6.14}$$

а из (6.10):

$$c = \frac{s}{A} \tag{6.15}$$

В конечном итоге:

$$\mathbf{Q} \;=\; a\mathbf{A} + ia\mathbf{B} + \frac{s}{A}\mathbf{C} \;=\; a\tilde{\mathbf{q}}'_L + s\mathbf{n} \tag{6.16}$$

Следовательно:

$$Q \equiv (s, \mathbf{Q}) \;=\; (s, a\tilde{\mathbf{q}}'_L + s\mathbf{n}) \;=\; a\tilde{\mathbf{q}}'_L + sN_{\mathbf{q}'_L}, \quad N_{\mathbf{q}'_L} = (1, \mathbf{n}) \tag{6.17}$$

Последнее есть не что иное, как представление (5.1), которое, как утверждает Лемма 3, единственно с точностью до н.в. класса, а значит $\tilde{\mathbf{q}}'_L$ принадлежит тому же классу, что и $\mathbf{q}_L$. Аналогично доказывается тождественность классов $\{\tilde{\mathbf{q}}'_R\}$ и $\{\mathbf{q}_R\}$. Единственность представления (6.1) и вместе с ним Теорема 1 доказаны. □

Определение 12. *Н.в. классы $\{\mathbf{q}_L\}$ и $\{\mathbf{q}_R\}$ мы назовем левой и правой структурными половинами (или образующей парой) обыкн. нулькватерниона Q*

Ввиду того, что умножение обыкновенного нулькватерниона Q на комплексное число не меняет его структурные половины, последние можно считать структурными половинами всего класса Q (см. определение 4), что можно записать, как:

$$\{Q\} \;=\; \{\mathbf{q}_L\} * \{\mathbf{q}_L\} \tag{6.18}$$

7 Нульвекторная аллельность

Лемма 4. *Для произвольной совокупности ненулевых неэквивалентных нульвекторов* $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_{n-1}$*, верно утверждение:*

$$\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * ... * \mathbf{q}_{n-1} * \mathbf{q}_n \;=\; C\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_n,\; n \in \mathbb{N},\; C \in \mathbb{C} \tag{7.1}$$

Доказательство. Рассмотрим некоторый обыкн. нулькватернион $Q = (s, \mathbf{Q})$. Умножим его представление (5.2) слева на $\mathbf{q}_L$:

$$\mathbf{q}_L * Q \;=\; \mathbf{q}_L * (\mathbf{q}_R + s\overline{N}_{\mathbf{q}_R}) \;=\; \mathbf{q}_L * \mathbf{q}_R + s\mathbf{q}_L * \overline{N}_{\mathbf{q}_R} \tag{7.2}$$

Но, согласно (6.4):

$$\mathbf{q}_L * Q \;=\; \frac{1}{c}\mathbf{q}_L * \mathbf{q}_L * \mathbf{q}_R \;=\; 0 \tag{7.3}$$

Сопоставляя (7.2) и (7.3), получим:

$$\mathbf{q}_L * \mathbf{q}_R + s\mathbf{q}_L * \overline{N}_{\mathbf{q}_R} \;=\; 0 \tag{7.4}$$

$$\mathbf{q}_L * \overline{N}_{\mathbf{q}_R} \;=\; -\frac{1}{s}\mathbf{q}_L * \mathbf{q}_R \tag{7.5}$$

Заметим, что равенство (7.5) выполняется для любых двух неэквивалентных нульвекторов $\mathbf{q}_L$ и $\mathbf{q}_R$. Перейдём теперь непосредственно к доказательству леммы. Сначала докажем (7.1) для случая $n = 3$.

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * \mathbf{q}_3 \;&=\; \mathbf{q}_1 * (\mathbf{q}_2 * \mathbf{q}_3) \;=\; \mathbf{q}_1 * (c_{23}\mathbf{q}_3 + s_{23}\overline{N}_{\mathbf{q}_3}) \;= \\ &=\; c_{23}\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_3 + s_{23}\mathbf{q}_1 * \overline{N}_{\mathbf{q}_3} \;=\; c_{23}\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_3 - \frac{s_{23}}{s_{13}}\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_3 \;= \\ &=\; (c_{23} - \frac{s_{23}}{s_{13}})\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_3 \;=\; C\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_3,\;\; C = c_{23} - \frac{s_{23}}{s_{13}}\end{aligned} \tag{7.6}$$

где мы воспользовались представлением (5.2) для нулькватерниона $Q_{23} = \mathbf{q}_2 * \mathbf{q}_3$ и равенством (7.5) для $\mathbf{q}_1$ и $\overline{N}_{\mathbf{q}_3}$: $\mathbf{q}_1 * \overline{N}_{\mathbf{q}_3} \;=\; -\frac{1}{s_{13}}\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_3$. Далее, прибегнем к методу индукции и покажем, что из справедливости уравнения (7.1) для n вытекает его справедливость и для $n+1$. Итак, пусть (7.1) имеет место для n. Умножим обе его части справа на произвольно взятый нульвектор $\mathbf{q}_{n+1}$:

$$\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * ... * \mathbf{q}_n * \mathbf{q}_{n+1} \;=\; C\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_n * \mathbf{q}_{n+1} \tag{7.7}$$

Но, согласно только что доказанному равенству (7.6) для трёх нульвекторов, последнее представимо в виде: $C'\mathbf{q}_1\mathbf{q}_{n+1},\; C' \in \mathbb{C}$. Значит:

$$\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * ... * \mathbf{q}_n * \mathbf{q}_{n+1} \;=\; CC'\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_{n+1} \;=\; C''\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_{n+1},\; C'' = CC' \tag{7.8}$$

Лемма 4 доказана. □

Теорема 2. Нульвекторная аллельность. *Для двух произвольных обыкн. нулькватернионов* $Q_1 = \mathbf{q}_{L1} * \mathbf{q}_{R1}$ *и* $Q_2 = \mathbf{q}_{L2} * \mathbf{q}_{R2}$ *с неэквивалентными* $\mathbf{q}_{R1}$ *и* $\mathbf{q}_{L2}$ *произведение* $Q = Q_1 * Q_2$ *имеет в качестве образующей пары левый н.в. класс первого сомножителя* Q_1 *и правый н.в. класс второго сомножителя* Q_2*:*

$$Q \;=\; Q_1 * Q_2 \;=\; C\mathbf{q}_{L1} * \mathbf{q}_{R2},\; c \in \mathbb{C} \tag{7.9}$$

Доказательство. Согласно Лемме 4 сразу получаем:

$$Q \;=\; Q_1 * Q_2 \;=\; \mathbf{q}_{L1} * \mathbf{q}_{R1} * \mathbf{q}_{L2} * \mathbf{q}_{R2} \;=\; c\mathbf{q}_{L1} * \mathbf{q}_{R2}, \quad c \in \mathbb{C} \tag{7.10}$$

Теорема 2 доказана. □

Выше в (4.10) мы видели, что степени нульвектора выше первой равны 0. Обратимся теперь к рассмотрению степеней обыкн. нулькватернионов.

$$Q^2 = Q * Q = \frac{1}{c^2}\mathbf{q}_L * \mathbf{q}_R * \mathbf{q}_L * \mathbf{q}_R \tag{7.11}$$

где мы воспользовались представлением (6.4). Далее, согласно свойству сопряжения произведения бикватернионов (2.6):

$$\mathbf{q}_R * \mathbf{q}_L \;=\; \overline{\mathbf{q}_L * \mathbf{q}_R} \;=\; c\overline{Q} \;=\; c(-\mathbf{q}_L + s\overline{N}_{\mathbf{q}_L}) \tag{7.12}$$

где мы воспользовались представлением (5.1). Таким образом, (7.11) преобразуется, с прибеганием к (4.6) в:

$$\begin{aligned} Q^2 \;&=\; \frac{1}{c^2}\mathbf{q}_L * (\mathbf{q}_R * \mathbf{q}_L) * \mathbf{q}_R \;=\; \frac{1}{c}\mathbf{q}_L * (-\mathbf{q}_L + s\overline{N}_{\mathbf{q}_L}) * \mathbf{q}_R \;= \\ &=\; \frac{s}{c}(\mathbf{q}_L * \overline{N}_{\mathbf{q}_L}) * \mathbf{q}_R \;=\; \frac{2s}{c}\;\mathbf{q}_L * \mathbf{q}_R \;=\; 2sQ \end{aligned} \tag{7.13}$$

откуда общая степень обыкн. нулькватерниона выражается, как:

$$Q^k = (2s)^{k-1}Q, \;\; k \in \mathbb{N} \tag{7.14}$$

8 Дуализм нульвекторных и однородных классов и общая классификация нулькватернионов

Теорема 3. *Нульвекторные и однородные классы изоморфны.*

Доказательство. Согласно определению (4.3), каждому н.в. классу соответствует один класс определителя (т.е. однородный класс). Верно и обратное: каждому однородному классу можно поставить в соответствие единственный н.в. класс, который он задаёт, как определитель. Это означает, что между н.в. и однородными классами существует взаимно-однозначное соответствие. Покажем теперь, что это соответствие сохраняется и для их произведений, что и будет означать изоморфизм этих классов. Пусть $\{\mathbf{q}_1\}$ и $\{\mathbf{q}_2\}$ два различных н.в. класса, а $\{N_1\}$ и $\{N_1\}$ - соответствуюшие им однородные классы (классы их определителей). Покажем, что:

$$\{\mathbf{q}_1\} * \{\mathbf{q}_2\} \;=\; \{N_1\} * \{N_2\} \tag{8.1}$$

Рассмотрим два произвольных представителя $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ классов $\{\mathbf{q}_1\}$ и $\{\mathbf{q}_2\}$ соответственно и нулькватернион $Q = (\alpha + i\beta, \mathbf{a} + i\mathbf{b})$, для которого $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ есть образующая пара:

$$Q \;=\; \mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 \tag{8.2}$$

Q также представляется в виде (5.5) и для него можно построить два однородных нулькватерниона:

$$\begin{cases} P_L &= \frac{\alpha\mathbf{a} + [\mathbf{ab}] + \beta\mathbf{b}}{\sqrt{2\alpha a}} \\ P_R &= \frac{\alpha\mathbf{a} - [\mathbf{ab}] + \beta\mathbf{b}}{\sqrt{2\alpha a}} \end{cases} \tag{8.3}$$

Непосредственное перемножение P_L и P_R даёт Q с точностью до числового множителя:

$$\{Q\} = \{P_L\} * \{P_R\} \tag{8.4}$$

С другой стороны легко убедиться в том, что P_L и P_R есть с точностью до числового множителя определители $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$, что и доказывает утверждение (8.1). □

Помимо факторизации обыкн. нулькватернионов нульвекторами (8.2) и однородными нулькватернионами (8.4), также, в силу изоморфизма Теоремы 3 имеет место и *смешанная факторизация*:

$$\{Q\} = \{P_L\} * \{\mathbf{q}_R\} = \{\mathbf{q}_L\} * \{P_R\} \tag{8.5}$$

т.е. структурные половины в виде нульвекторов и однородных нулькватернионов взаимозаменяемы.

В разделе 3 мы видели, что н.в. класс образует алгебру над полем комплексных чисел. В силу Теоремы 3, это же утверждение применимо и к однородным классам. Далее, если два обыкн. нулькватерниона принадлежат одному классу, то они задаются одной и той же образующей парой. Значит, согласно Теореме 2, и их произведение имеет эту же пару в качестве образующей, т.е. остаётся в том же классе. Поэтому любой класс обыкн. нулькватернионов есть также алгебра. Сейчас можно сделать общий вывод о том, что любой нулькватернионный класс есть алгебра над полем комплексных чисел. Такое утверждение нельзя сделать о любых бикватернионных классах, но только о нулькватернионных.

Можно дать следующую общую классификацию нулькватернионов. Все нулькватернионы могут быть трех видов: нульвекторы, однородные и обыкновенные, причем первые два вида изоморфны друг другу, а множество обыкн. нулькватернионов представимо, как прямое произведение множеств комплексных чисел и нульвекторов (либо однородных нулькватернионов):

$$\{Q\} = \mathbb{C} \times \{\mathbf{q}\} = \mathbb{C} \times \{P\} \tag{8.6}$$

Заметим, что из (5.1),(5.2) следует, что нульвекторы и однор. нулькватернионы выражают собою предельные случаи обыкн. нулькватернионов: первые при $s = 0$, а вторые при $\|\mathbf{q}_L\| = 0$, $\|\mathbf{q}_R\| = 0$. Причем результат получается разный в зависимости от того, взято левое (5.1) или правое (5.2) представление, в чем также можно видеть проявление нулькватернионного дуализма.

Литература

[1] W.R. Hamilton On the geometrical interpretation of some results obtained (by calculation with biquaternions) // *Proc. Roy. Irish Acad.*, Vol. 5, pp. 388 – 390, 1853.

[2] S.J. Sangwine, D. Alfsmann Determination of the biquaternion divisors of zero, including the idempotents and nilpotents // *Advances in Applied Clifford Algebras*, Vol. 20, №2, pp. 401 – 410, 2010.

[3] С.В. Петухов Гиперкомплексные числа и алгебраическая система генетических алфавитов. Элементы алгебраической биологии // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, том 8, №2(16), стр. 118 – 139, 2011.

[4] А.В. Горюнов Идущая волна как модель частицы. arXiv:1006.0016v3, 2010.

[5] L. Silberstein Quaternionic Form of Relativity // *Philos. Mag. S.,* 6, Vol. 23, №137, pp. 790 – 809, 1912.

[6] А.А. Алексеева Дифференциальная алгебра бикватернионов. Преобразования Лоренца биволновых уравнений // *Математический журнал*, Алматы, Vol. 10, № 35, 2010, pp. 33 – 41.

[7] L. Dicksonr §13 Equivalence of the complex quaternion and matric algebras // *Linear Algebras,* 1914, p. 13.

NULLVECTOR ALGEBRA

S.Ya. Kotkovsky

s_kotkovsky@mail.ru

In this paper, we study the properties of biquaternionic divisors of zero («nullquaternions»). Subalgebra of nullquaternions is closely related to its subclass – «nullvectors», which are complex-valued three-dimension vectors, having zero square. Theorem of nullvector factorization shows that regular nullquaternion can be represented as product of two nullvectors belonging to uniquely defined classes, thus defining the structure of nullquaternion. Theorem of nullvector allelity proves that product of two nullquaternions preserves one of the structure halves of each multiplier. Last circumstance signs for prominent similarity of nullvector algebra with genetics: product of nullvectors is similar to combination of genes in chromosome. We show, that along with nullvectors there exist «uniform» classes of nullquaternions which are isomorphic to nullvector classes. Regular, uniform nullquaternions and nullvectors represent general classification of nullquaternions with relation to multiplication.

Key Words: biquaternions, divisors of zero, nullvectors, isotropic vectors, genetic algebra, hypercomplex numbers.